RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE EN SCIENCES APPLIQUÉES DE TLEMCEN

T L M C E N

Département Département des Mathématiques

Devoir Surveillé Du Premier Semestre
Courigé Et Barème

Module: ANALYSE III | Responsable: M.HOUBAD

Date: 21 Novembre 2016 | Année: 2016 - 2017

Coefficient: 4 | Durée: $2h00$

Exercice 1 (5pts). Soit le domaine $\mathcal{D}$ délimité par les deux arcs

$$(\mathcal{A}_1): \quad x^2+y^2-2y=0, \quad y \geq 1, \quad (\mathcal{A}_2): \quad x^2+y^2+2y=0, \quad y \leq -1$$

et les deux segments

$$(\mathcal{S}_1): \quad x=-1, \quad -1 \leq y \leq +1, \quad (\mathcal{S}_2): \quad x=+1, \quad -1 \leq y \leq +1$$

1. Représentation du domaine $\mathcal{D}$ dans le plan (XOY) $\longleftarrow$ $\boxed{01pt}$

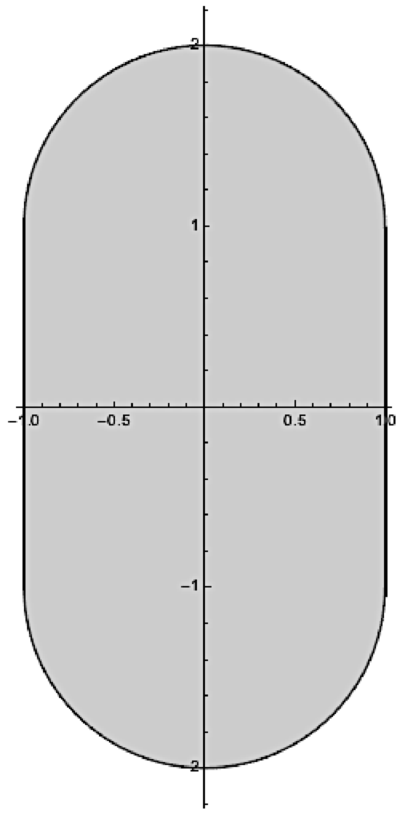

Fig 0.1 *Représentation du domaine $\mathcal{D}$.*

2. Changement de l'ordre d'intégration : $\longleftarrow$ $\boxed{01pt}$

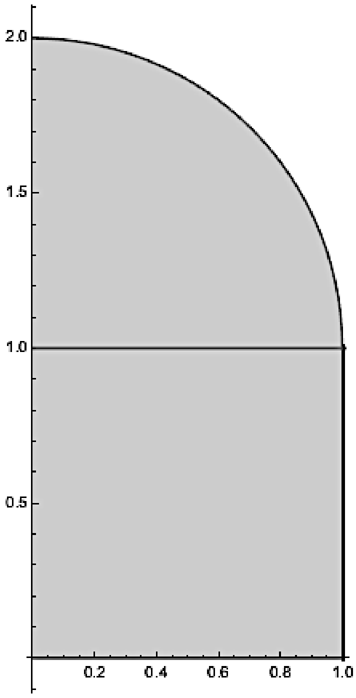

Fig 0.2 *Représentation du domaine d'intégration dans le plan* (XOY).

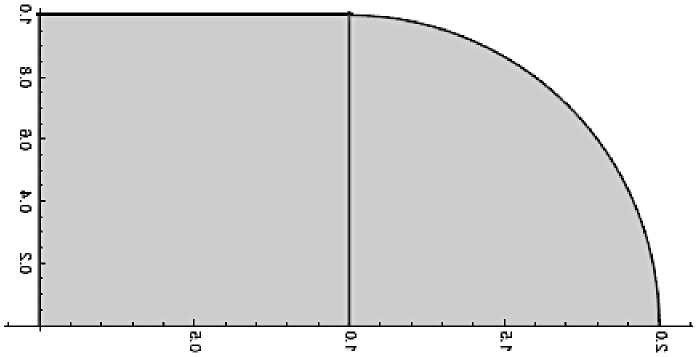

Fig 0.3 *Représentation du domaine d'intégration dans le plan* (XOY).

$$\int_0^1 \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dxdy$$

3. Détermination λ et f : $\longleftarrow$ $\boxed{\text{0.5pt (Pour } \lambda\text{) + 0.5pt (Pour f)}}$

   Pour que

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \lambda \int_0^{+1} \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx,$$

   vu la formule du calcule de l'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ est exprimer par

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy$$

   et vu la symétrie du domaine $\mathcal{D}$ par rapport à l'origine, alors il suffit de prendre

$$\lambda = 4, \quad f(x,y) = 1.$$

4. Calcule l'aire de $\mathcal{D}$. $\longleftarrow$ $\boxed{\text{01pt (Méthode) + 01pt (Valeur)}}$

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(\mathcal{D}) &= 4\int_0^{+1}\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} dydx = 4\int_0^{+1} 1+\sqrt{1-x^2}dx \\
&= 4+4\int_0^{+1}\sqrt{1-x^2}dx = \left\langle \begin{array}{ll} x = \sin\theta, & dx = \cos\theta d\theta \\ x \in [0,1], & \theta \in [0,\pi/2] \end{array} \right\rangle \\
&= 4+4\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^2 dx = 4+4\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}dx \\
&= 4+4\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = 4+\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (5pts)**.** Soit le domaine $\mathcal{D}$ l'ensemble définit par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad \frac{1}{2}y \le x+1 \le y\right\}.$$

1. Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ définies

$$\Phi(x,y) = \left(\frac{y}{x+1}, x^2+y^2\right), \quad \psi(x,y) = x^2+y^2+x$$

(a) Représentation dans le même plan (XOY) le domaine $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $\longleftarrow$ $\boxed{0.5\text{pt}+0.5\text{pt}}$

$$\psi(x,y) = 0$$

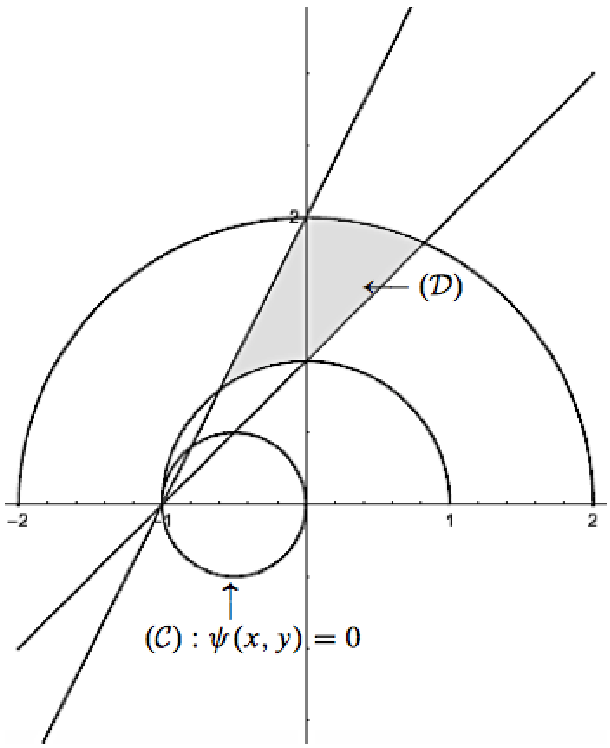

Fig 0.4 *Représentation du $(\mathcal{D})$ et de la courbe $(\mathcal{C})$.*

(b) On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \psi(x,y) \neq 0.$$

Vu que

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset \qquad \longleftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \psi(x,y) \neq 0. \qquad \longleftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

(c) On note par $|\mathcal{J}_\Phi|$ la valeur absolute du déterminant de la matrice jacobienne de Φ, on pose

$$\Phi(x,y) = (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)) = (u,v), \quad \Phi_1(x,y) = u = \frac{y}{x+1}, \quad \Phi_2(x,y) = v = x^2+y^2,$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}_\Phi| &= \left|\det\begin{pmatrix} \partial_x\Phi_1(x,y) & \partial_y\Phi_1(x,y) \\ \partial_x\Phi_2(x,y) & \partial_y\Phi_2(x,y) \end{pmatrix}\right| && \longleftarrow \boxed{0.25\text{pt}} \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} -\dfrac{y}{(x+1)^2} & \dfrac{1}{x+1} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\right| && \longleftarrow \boxed{0.25\text{pt}} \\
&= 2\frac{|x^2+y^2+x|}{(1+x)^2} = 2\frac{|\psi(x,y)|}{(1+x)^2}. && \longleftarrow \boxed{0.25\text{pt}}
\end{aligned}$$

(d) On en déduire que Φ est un changement de variable entre le domaine $\mathcal{D}$ et un domaine Δ à déterminer.

— Φ est un changement de variable : Vu que

$$|\mathcal{J}_\Phi| = 2\frac{|\psi(x,y)|}{(1+x)^2},$$

et que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \psi(x,y) \neq 0, \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt}$$

et que

$$\nexists y \in \mathbb{R} : \quad (-1,y) \in \mathcal{D}, \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt}$$

alors Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et $\longleftarrow \boxed{0.25pt}$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \mathcal{J}_\Phi(x,y) \neq 0,$$

donc Φ est un changement de variable entre $\mathcal{D}$ est un certain domaine Δ. $\longleftarrow \boxed{0.25pt}$

— Détermination de Δ : Vu que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad y > 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2}y \leq x+1 \leq y,$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{y} \leq 1,$$

autrement

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 1 \leq \frac{y}{x+1} \leq 2,$$

alors

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad 1 \leq \Phi_2(x,y) \leq 4, \quad 1 \leq \Phi_1(x,y) \leq 2,$$

finalement

$$1 \leq v \leq 4, \quad 1 \leq u \leq 2,$$

en conclusion

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 4\right\}. \qquad \longleftarrow \boxed{0.5pt}$$

2. Détermination de la masse de $\mathcal{D}$ sachant que ca répartition surfacique de masse vaut

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \rho(x,y) = 2\frac{\left|x^2 + y^2 + x\right|}{(x+1)^2}.$$

Vu que

$$\begin{aligned}
\text{Masse}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} \rho(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} 2\frac{\left|x^2+y^2+x\right|}{(x+1)^2}dxdy \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt} \\
&= \iint_{\mathcal{D}} |\mathcal{J}_\Phi(x,y)|\, dxdy = \iint_{\Delta} dudv = \int_1^4 \int_1^2 dudv = 3. \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt}
\end{aligned}$$

3. Détermination du moment d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à l'origine.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_O &= \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)2\frac{\left|x^2+y^2+x\right|}{(x+1)^2}dxdy \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt} \\
&= \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,|\mathcal{J}_\Phi(x,y)|\, dxdy = \iint_{\Delta} vdudv = \int_1^2 \int_1^4 vdvdu = \frac{15}{2}. \qquad \longleftarrow \boxed{0.25pt}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (5pts)**.** Soit la surface $(\mathcal{S})$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(\mathcal{S}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

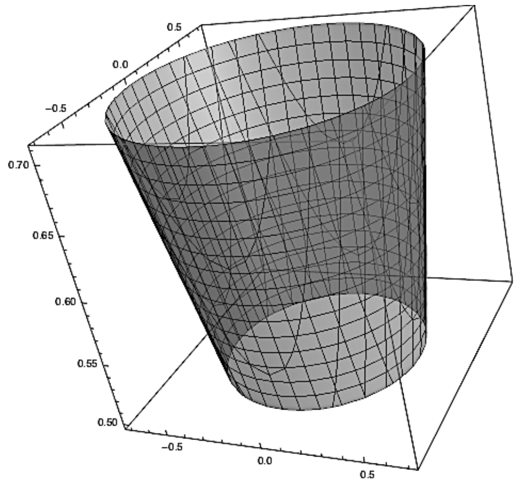

Fig 0.5 *Représentation de la vu 3d de la surface* $(\mathcal{S})$

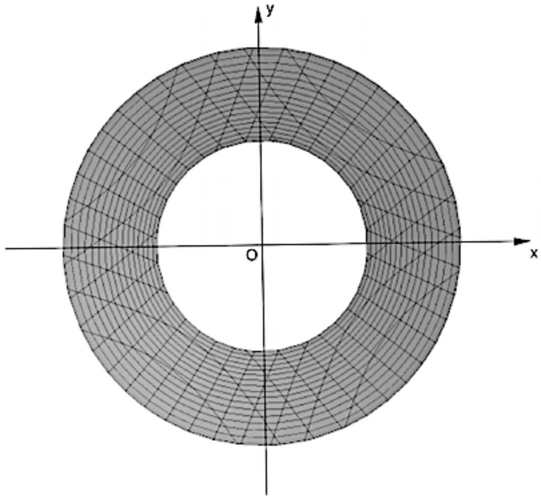

Fig 0.6 *Représentation de la vu haut surface* $(\mathcal{S})$

On donne la formule qui permit de calculer l'aire de $(\mathcal{S})$

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dxdy$$

— Détermination de l'expression de f : La fonction f c'est la fonction qui définie la surface $(\mathcal{S})$, vu que $z > 0$ donc

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \longleftarrow \boxed{0.75\text{pt (Explication)} + 0.75\text{pt (Expression)}}$$

— Détermination du domaine $\mathcal{D}$: Le domaine $\mathcal{D}$ c'est la projection de la surface $(\mathcal{S})$ sur le plan (XOY) ainsi

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}. \qquad \longleftarrow \boxed{0.75\text{pt (Explication)} + 0.75\text{pt (Expression)}}$$

— Calculer l'aire de $(\mathcal{S})$:

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\mathcal{S}) &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dxdy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\ dxdy \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{2}\ dxdy \qquad \longleftarrow \boxed{0.5\text{pt}}\end{aligned}$$

on utilise les coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dxdy = rdrd\theta \qquad \longleftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

et le fait que

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad \longleftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

donc

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2}rdrd\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \qquad \longleftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 4 (5pts)**.** Calcule du volume du domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ définit par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad -1 \leq z - x^2 - y^2 \leq +1, \quad x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

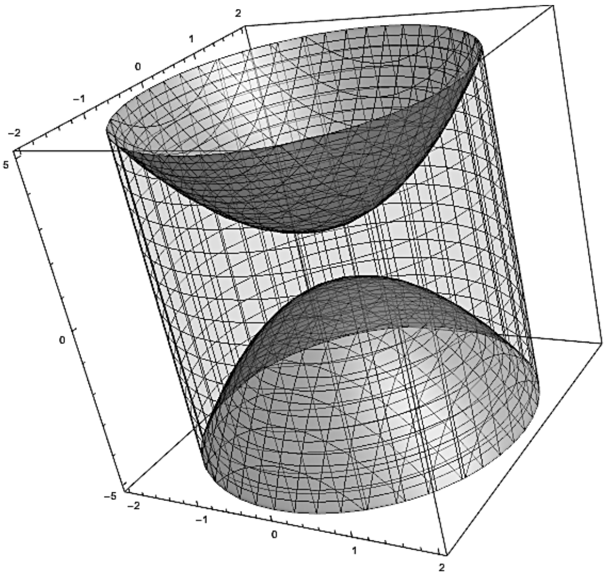

Fig 0.7 *Représentation de la vu 3D du domaine $\mathcal{D}$.*

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \mathcal{D} &\implies -1 \leq z - x^2 - y^2 \leq +1, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\
&\implies -1 + x^2 + y^2 \leq z \leq +1 + x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \qquad \longleftarrow \boxed{\text{0.5pt}}
\end{aligned}$$

On passe au cordonnées cylindrique on a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \qquad \longleftarrow \boxed{\text{0.5pt}}$$

donc

$$-1 + r^2 \leq z \leq +1 + r^2, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad dxdydz = rdrdzd\theta, \qquad \longleftarrow \boxed{\text{0.5pt X 4}}$$

ce qui permit d'avoir

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dxdydz \qquad \longleftarrow \boxed{\text{0.5pt}} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1+r^2}^{+1+r^2} rdzdrd\theta \qquad \longleftarrow \boxed{\text{0.5pt}} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4d\theta \\
&= 8\pi. \qquad \longleftarrow \boxed{\text{1pt}}
\end{aligned}$$