

R É P U B L I Q U E A L G É R I E N N E D É M O C R A T I Q U E E T P O P U L A I R E
M I N I S T È R E D E L ' E N S E I G N E M E N T S U P É R I E U R E E T D E L A R E C H E R C H E S C I E N T I F I Q U E
É C O L E S U P É R I E U R E E N S C I E N C E S A P P L I Q U É E S D E T L E M C E N
T L M C E N

Département Département des Mathématiques

Devoir Surveillé Du Premier Semestre
Courigé Et Barème

Module: ANALYSE III

Responsable: M.HOUBAD

Date: 21 Novembre 2016

Année: 2016 - 2017

Coefficient: 4

Durée: 2h00

Exercice 1 (5pts). Soit le domaine \mathcal{D} délimité par les deux arcs

$$(\mathcal{A}_1) : x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad y \geq 1, \quad (\mathcal{A}_2) : x^2 + y^2 + 2y = 0, \quad y \leq -1$$

et les deux segments

$$(\mathcal{S}_1) : x = -1, \quad -1 \leq y \leq +1, \quad (\mathcal{S}_2) : x = +1, \quad -1 \leq y \leq +1$$

1. Représentation du domaine \mathcal{D} dans le plan (XOY) ← 01pt

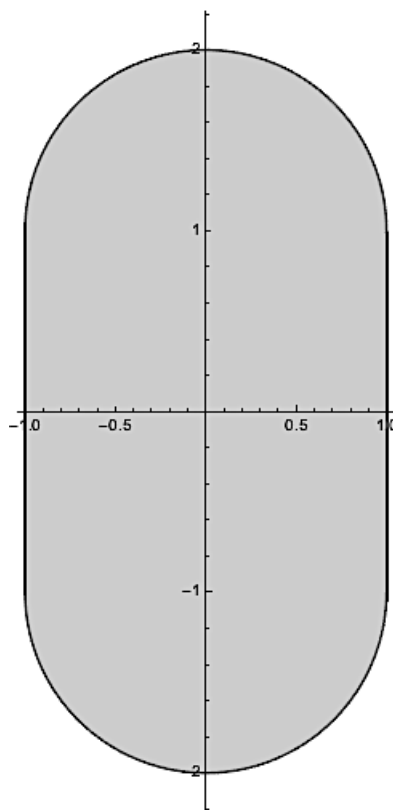


Fig 0.1 Représentation du domaine \mathcal{D} .

2. Changement de l'ordre d'intégration : ← 01pt

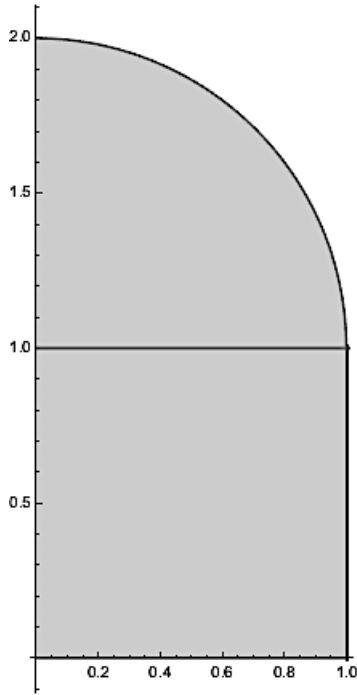


Fig 0.2 Représentation du domaine d'intégration dans le plan (XOY).

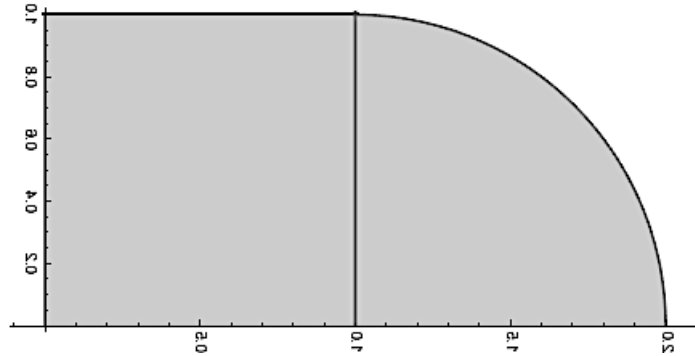


Fig 0.3 Représentation du domaine d'intégration dans le plan (XOY).

$$\int_0^1 \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx dy$$

3. Détermination λ et f : ← **0.5pt (Pour λ) + 0.5pt (Pour f)**
 Pour que

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \lambda \int_0^{+1} \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx,$$

vu la formule du calcul de l'aire d'un domaine de \mathbb{R}^2 est exprimer par

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$$

et vu la symétrie du domaine \mathcal{D} par rapport à l'origine, alors il suffit de prendre

$$\lambda = 4, \quad f(x, y) = 1.$$

4. Calcule l'aire de \mathcal{D} . ← **01pt (Méthode) + 01pt (Valeur)**

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{D}) &= 4 \int_0^{+1} \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} dy dx = 4 \int_0^{+1} 1 + \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 4 + 4 \int_0^{+1} \sqrt{1-x^2} dx = \left\langle \begin{array}{l} x = \sin \theta, \quad dx = \cos \theta d\theta \\ x \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi/2] \end{array} \right\rangle \\ &= 4 + 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^2 dx = 4 + 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} dx \\ &= 4 + 4 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = 4 + \pi. \end{aligned}$$

Exercice 2 (5pts). Soit le domaine \mathcal{D} l'ensemble définit par

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2}y \leq x + 1 \leq y \right\}.$$

1. Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ définies

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{y}{x+1}, x^2 + y^2 \right), \quad \psi(x, y) = x^2 + y^2 + x$$

(a) Représentation dans le même plan (XOY) le domaine (\mathcal{D}) et la courbe (\mathcal{C}) d'équation ← 0.5pt+0.5pt

$$\psi(x, y) = 0$$

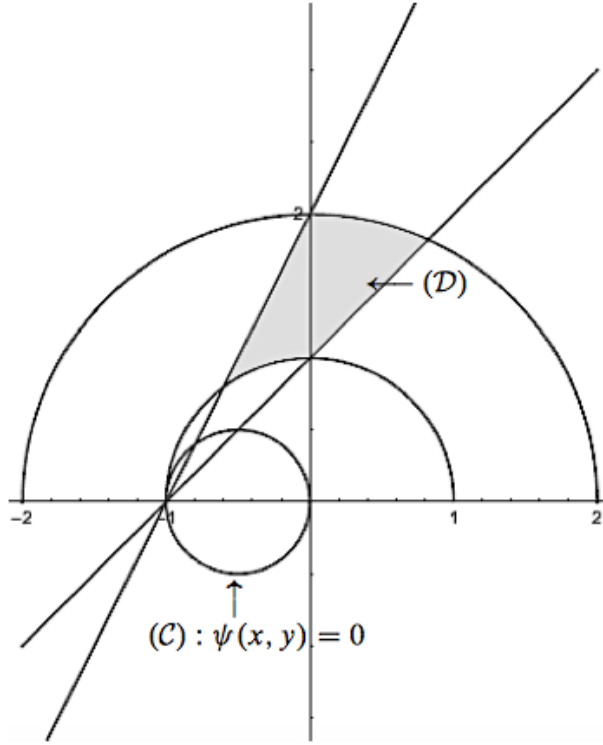


Fig 0.4 Représentation du (\mathcal{D}) et de la courbe (\mathcal{C}).

(b) On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \psi(x, y) \neq 0.$$

Vu que

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad \leftarrow \text{0.5pt}$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \psi(x, y) \neq 0. \quad \leftarrow \text{0.25pt}$$

(c) On note par $|\mathcal{J}_\Phi|$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de Φ , on pose

$$\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)) = (u, v), \quad \Phi_1(x, y) = u = \frac{y}{x+1}, \quad \Phi_2(x, y) = v = x^2 + y^2,$$

ce qui donne que

$$|\mathcal{J}_\Phi| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_x \Phi_1(x, y) & \partial_y \Phi_1(x, y) \\ \partial_x \Phi_2(x, y) & \partial_y \Phi_2(x, y) \end{pmatrix} \right| \quad \leftarrow \text{0.25pt}$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{y}{(x+1)^2} & \frac{1}{x+1} \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \right| \quad \leftarrow \text{0.25pt}$$

$$= 2 \frac{|x^2 + y^2 + x|}{(1+x)^2} = 2 \frac{|\psi(x, y)|}{(1+x)^2}. \quad \leftarrow \text{0.25pt}$$

(d) On en déduit que Φ est un changement de variable entre le domaine \mathcal{D} et un domaine Δ à déterminer.

— Φ est un changement de variable : $\forall u$ que

$$|\mathcal{J}_\Phi| = 2 \frac{|\psi(x, y)|}{(1+x)^2},$$

et que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \psi(x, y) \neq 0, \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

et que

$$\exists y \in \mathbb{R} : (-1, y) \in \mathcal{D}, \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

alors Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} et $\leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \mathcal{J}_\Phi(x, y) \neq 0,$$

donc Φ est un changement de variable entre \mathcal{D} et un certain domaine Δ . $\leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$

— Détermination de Δ : $\forall u$ que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : y > 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2}y \leq x + 1 \leq y,$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{y} \leq 1,$$

autrement

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 1 \leq \frac{y}{x+1} \leq 2,$$

alors

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : 1 \leq \Phi_2(x, y) \leq 4, \quad 1 \leq \Phi_1(x, y) \leq 2,$$

finalement

$$1 \leq v \leq 4, \quad 1 \leq u \leq 2,$$

en conclusion

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 4\}. \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

2. Détermination de la masse de \mathcal{D} sachant que sa répartition surfacique de masse vaut

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \rho(x, y) = 2 \frac{|x^2 + y^2 + x|}{(x+1)^2}.$$

$\forall u$ que

$$\text{Masse}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} 2 \frac{|x^2 + y^2 + x|}{(x+1)^2} dx dy \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} |\mathcal{J}_\Phi(x, y)| dx dy = \iint_{\Delta} dudv = \int_1^2 \int_1^4 dudv = 3. \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

3. Détermination du moment d'inertie de \mathcal{D} par rapport à l'origine.

$$I_O = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) 2 \frac{|x^2 + y^2 + x|}{(x+1)^2} dx dy \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) |\mathcal{J}_\Phi(x, y)| dx dy = \iint_{\Delta} v dudv = \int_1^2 \int_1^4 v dudv = \frac{15}{2}. \quad \leftarrow \boxed{0.25\text{pt}}$$

Exercice 3 (5pts). Soit la surface (S) de \mathbb{R}^3 définie par

$$(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

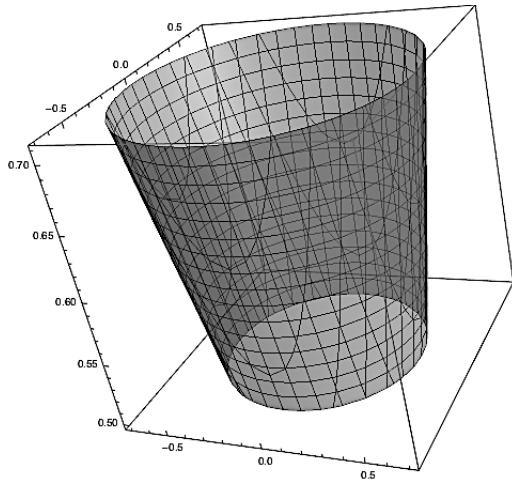


Fig 0.5 Représentation de la vue 3d de la surface (S)

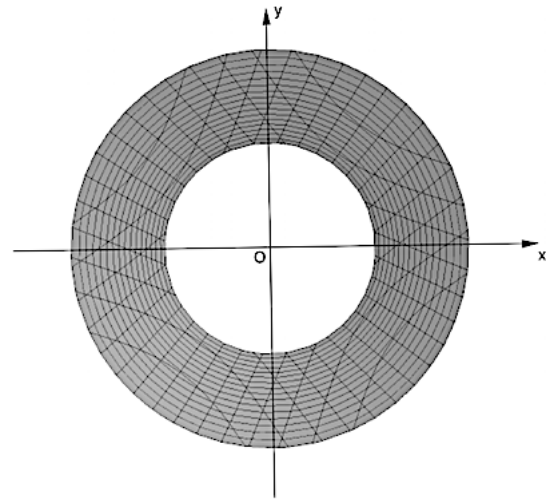


Fig 0.6 Représentation de la vue haut surface (S)

On donne la formule qui permet de calculer l'aire de (S)

$$\text{Aire}(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

— Détermination de l'expression de f : La fonction f c'est la fonction qui définit la surface (S), vu que $z > 0$ donc

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \leftarrow \boxed{0.75\text{pt (Explication)} + 0.75\text{pt (Expression)}}$$

— Détermination du domaine D : Le domaine D c'est la projection de la surface (S) sur le plan (XOY) ainsi

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}. \quad \leftarrow \boxed{0.75\text{pt (Explication)} + 0.75\text{pt (Expression)}}$$

— Calculer l'aire de (S) :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{2} dx dy \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}} \end{aligned}$$

on utilise les coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

et le fait que

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

donc

$$\text{Aire}(S) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2} r dr d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi. \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 4 (5pts). Calcule du volume du domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z - x^2 - y^2 \leq +1, \quad x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

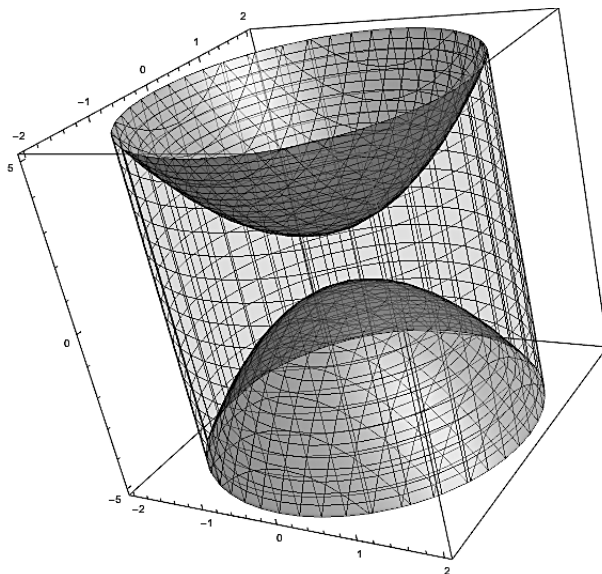


Fig 0.7 Représentation de la vue 3D du domaine \mathcal{D} .

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{D} &\implies -1 \leq z - x^2 - y^2 \leq +1, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \\ &\implies -1 + x^2 + y^2 \leq z \leq +1 + x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned} \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

On passe au coordonnées cylindrique on a

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}}$$

donc

$$-1 + r^2 \leq z \leq +1 + r^2, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad dx dy dz = r dr dz d\theta, \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt} \times 4}$$

ce qui permet d'avoir

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} dx dy dz \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-1+r^2}^{+1+r^2} r dz dr d\theta \quad \leftarrow \boxed{0.5\text{pt}} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4 d\theta \\ &= 8\pi. \quad \leftarrow \boxed{1\text{pt}} \end{aligned}$$