République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l' Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Tlmcen
Département Département des Mathématiques

Devoir Surveillé Du Premier Semestre

Module: Analyse III | Responsable: M.HOUBAD
Date: 21 Novembre 2016 | Année: 2016 - 2017
Coefficient: 4 | Durée: $2h00$

Exercice 1 (5pts)**.** Soit le domaine $\mathcal{D}$ délimité par les deux arcs

$$(\mathcal{A}_1): \quad x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad y \geq 1, \quad (\mathcal{A}_2): \quad x^2 + y^2 + 2y = 0, \quad y \leq -1$$

et les deux segments

$$(\mathcal{S}_1): \quad x = -1, \quad -1 \leq y \leq +1, \quad (\mathcal{S}_2): \quad x = +1, \quad -1 \leq y \leq +1$$

1. Dessiner le domaine $\mathcal{D}$ dans le plan (XOY)
2. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale suivante
$$\int_0^{+1} \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dydx$$
3. Déterminer λ et f pour que
$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \lambda \int_0^{+1} \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dydx.$$
4. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

Exercice 2 (5pts)**.** Soit le domaine $\mathcal{D}$ l'ensemble définit par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2}y \leq x + 1 \leq y\right\}.$$

1. Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ définies
$$\Phi(x, y) = \left(\frac{y}{x + 1}, x^2 + y^2\right), \quad \psi(x, y) = x^2 + y^2 + x$$
   (a) Tracer dans le même plan (XOY) le domaine $(\mathcal{D})$ et la courbe d'équation
   $$\psi(x, y) = 0$$
   (b) Déduire que
   $$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \quad \psi(x, y) \neq 0.$$
   (c) On note par $|\mathcal{J}_\Phi|$ la valeur absolute du déterminant de la matrice jacobienne de Φ. Montre que
   $$|\mathcal{J}_\Phi| = 2\frac{|\psi(x, y)|}{(1 + x)^2}.$$
   (d) Déduire que Φ est un changement de variable entre le domaine $\mathcal{D}$ et un domaine Δ à déterminer.

2. Déterminer la masse de $\mathcal{D}$ sachant que ca répartition surfacique de masse vaut

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \rho(x,y) = 2\frac{\left|x^2+y^2+x\right|}{(x+1)^2}.$$

3. Déterminer le moment d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à l'origine.

Exercice 3 (5pts)**.** Soit la surface $(\mathcal{S})$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(\mathcal{S}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = x^2+y^2; \quad \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

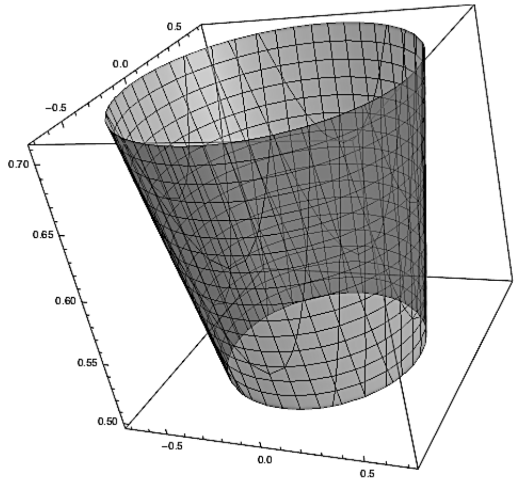

Fig 0.1 *Représentation de la vu 3d de la surface* $(\mathcal{S})$

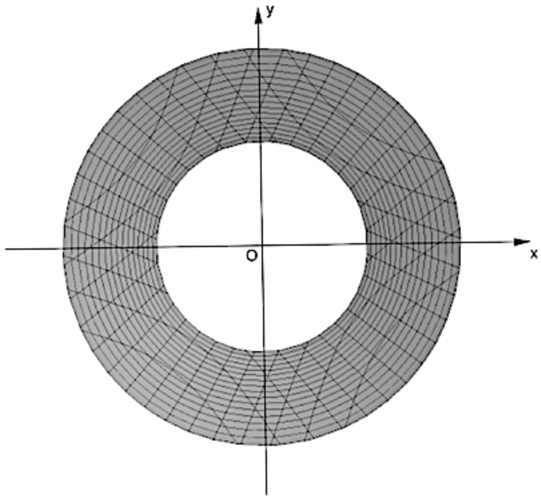

Fig 0.2 *Représentation de la vu haut surface* $(\mathcal{S})$

On donne la formule qui permit de calculer l'aire de $(\mathcal{S})$

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dxdy$$

Déterminer l'expression de f, le domaine $\mathcal{D}$ et calculer l'aire de $(\mathcal{S})$.

Exercice 4 (5pts)**.** Calculer le volume du domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ définit par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad -1 \leq z-x^2-y^2 \leq +1, \quad x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

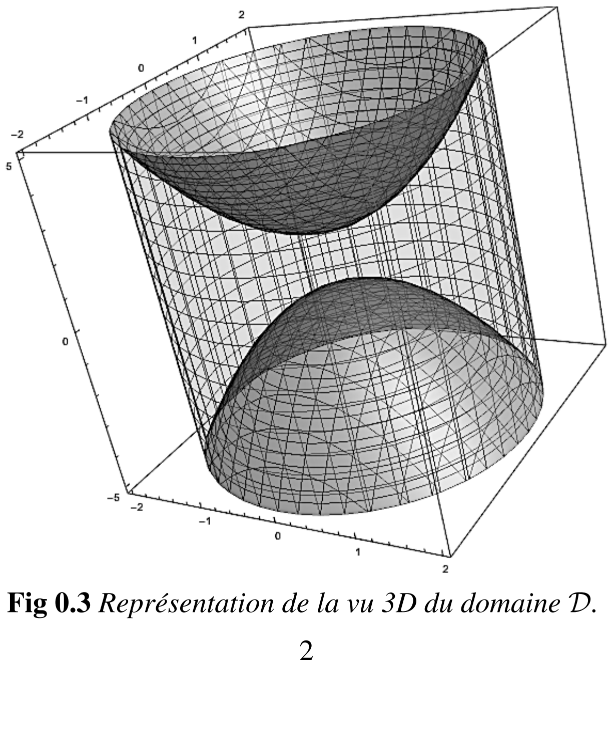

Fig 0.3 *Représentation de la vu 3D du domaine* $\mathcal{D}$.