Corrigé de l'épreuve du
Concours de physique
Juin 2014 (M. MEBROUKI
EPST TLEMCEN)

1/ L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

L'énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) y^2$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} f \dot{y}^2$$

2/ Equation de mouvement par formalisme

a/ de Lagrange.

$$L = T - U = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) y^2$$

L'équation d'Euler Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + F_0 \cos \Omega t$$

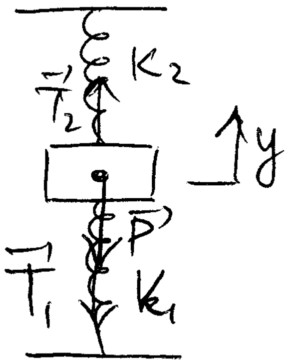
Le calcul donne :

$$M\ddot{y} + (K_1 + K_2) y + f\dot{y} = F_0 \cos \Omega t$$

b/ le principe fondamental de la dynamique :

- à l'équilibre :

$$\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{0}$$



Par projection :

$$P + K_1 \Delta x_1 - K_2 \Delta x_2 = 0 \qquad (1)$$

Δx_1 et Δx_2 sont les élongations des ressorts K_1 et K_2 à l'équilibre.

- mouvement :

$$\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{F_f}+\vec{F_{ext}}=M\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

$$P + K_1(\Delta x_1 - y) - K_2(\Delta x_2 + y) - f\dot{y} + F_0\cos\Omega t = M\ddot{y} \qquad (2)$$

en remplaçant l'expression de la condition d'équilibre (1) en (2) on trouve :

$$-K_1 y - K_2 y - f\dot{y} + F_0\cos\Omega t = M\ddot{y}$$

ou encore :

$$M\ddot{y} + (K_1+K_2)y + f\dot{y} = F_0\cos\Omega t.$$

3/ On suppose que le système mécanique est soumis à une force sinusoïdale de forme complexe :

$$\tilde{F}(t) = F_0 \, e^{j\Omega t}$$

telle que $F(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{F}(t)\}$.

l'équation du mouvement s'écrit donc :

$$M\ddot{\tilde{y}} + (K_1+K_2)\tilde{y} + f\dot{\tilde{y}} = F_0 \, e^{j\Omega t}$$

la solution de cette équation (dans le régime permanent) est donnée par :

$$\tilde{y}(t) = \tilde{A}\, e^{j\Omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = A\, e^{j\varphi}$$

où A est l'amplitude du mouvement et φ le déphasage entre la force extérieure et le mouvement de la masse.

En remplaçant $\tilde{y}(t)$ dans l'équation du mouvement on obtient :

$$\left[-M\Omega^2 + (K_1+K_2) + jf\Omega\right]\tilde{A} = F_0$$

d'où

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{\left[-M\Omega^2 + K_1 + K_2\right] + jf\Omega}$$

Mais on sait que $\tilde{A} = A\, e^{j\varphi}$

Ce qui donne :

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(-M\Omega^2 + K_1 + K_2)^2 + f^2\Omega^2}}$$

Rappelons que :

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{\sqrt{(-M\Omega^2 + K_1 + K_2)^2 + f^2\Omega^2}\; e^{j\theta}}$$

avec $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{f\Omega}{-M\Omega^2 + K_1 + K_2}\right)$

par identification :

$\varphi = -\theta \implies \varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{f\Omega}{-M\Omega^2 + K_1 + K_2}\right)$.

4 La pulsation de résonance est donnée par :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega = \Omega_R} = 0$$

Ce qui donne $\Omega_R = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M} - 2\frac{f^2}{4M^2}}$

5/ la puissance fournie au système est donnée par :

$$P_f = F(t)\,\dot{y}(t)$$

$$= (F_0 \cos\Omega t)\left(\dot{\overline{A \cos(\Omega t + \varphi)}}\right)$$

$$= -A F_0 \Omega \cos\Omega t \sin(\Omega t + \varphi)$$

la puissance moyenne fournie est égale à :

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_f(t)\,dt \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T (-A F_0 \Omega) \cos\Omega t \sin(\Omega t + \varphi)\,dt$$

$$= -\frac{A F_0 \Omega}{T}\int_0^T \cos\Omega t\left[\sin\Omega t \cos\varphi + \cos\Omega t \sin\varphi\right] dt$$

$$= -\frac{A F_0 \Omega}{T}\left[\cos\varphi \underbrace{\int_0^T \cos\Omega t \sin\Omega t\,dt}_{= 0} + \sin\varphi \underbrace{\int_0^T \cos^2\Omega t\,dt}_{= T/2}\right]$$

$$\langle P_f \rangle = -\frac{A F_0 \Omega}{T}\,\frac{T}{2}\sin\varphi = -\frac{A F_0 \Omega}{2}\sin\varphi$$

Mais on sait déjà que :

$$A(\Omega) = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{K_1+K_2}{M}$ et $\gamma = \frac{f}{2M}$

et $tg\,\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2-\omega_0^2}$

mais on sait aussi que

$$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$$

ce qui donne :

$$\langle P_f \rangle = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}\ \frac{F_0}{2}\ \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\ \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$$

$$\langle P_f \rangle = \frac{F_0^2}{M}\ \frac{\gamma\Omega^2}{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}.$$

6/ la puissance moyenne maximale est donnée par : $\left.\frac{d\langle P_f\rangle}{d\Omega}\right|_{\Omega=\omega_0} = 0$

avec $\langle P_f \rangle_{max} = \frac{F_0^2}{4M\gamma}$

7/ La bande passante pour la puissance fournie $\langle P_f \rangle$ est fixée comme étant celle où $\langle P_f \rangle$ est supérieure à $\frac{\langle P_f \rangle_{max}}{2}$.

On pose donc :

$$\langle P_f \rangle_{\Omega_{c_1, c_2}} = \frac{F_0^2}{8M\gamma}$$

ou encore :

$$\frac{F_0^2}{M} \frac{\gamma \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{F_0^2}{8M\gamma}$$

ce qui donne :

$$8\gamma^2\Omega^2 = (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$$

ou encore :

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\gamma^2\Omega^2$$

Pour un amortissement très faible, on néglige les termes quadratiques en $\frac{\gamma}{\omega_0}$: (on ne garde que les termes $\frac{\gamma}{\omega_0}$!)

On a :

$$\Omega^4 + \omega_0^4 - 2\Omega^2\omega_0^2 - 4\gamma^2\Omega^2 = 0$$

ou encore :

$$\Omega^4 - \Omega^2(2\omega_0^2 + 4\gamma^2) + \omega_0^4 = 0$$

faisons un changement de variable :

$$Z = \Omega^2$$

on obtient : $Z^2 - Z(2\omega_0^2 + 4\gamma^2) + \omega_0^4 = 0$

le discriminant Δ s'écrit

$$\Delta = (2\omega_0^2 + 4\gamma^2)^2 - 4\omega_0^4 = 16\omega_0^2\gamma^2 + 16\gamma^4$$

les deux solutions :

$$Z_1 = \frac{2\omega_0^2 + 4\gamma^2 - \sqrt{16\omega_0^2\gamma^2 + 16\gamma^4}}{2}$$

$$Z_1 = \omega_0^2 + 2\gamma^2 - 2\sqrt{\omega_0^2\gamma^2 + \gamma^4}$$

$$Z_1 = \omega_0^2 + 2\gamma^2 - 2\omega_0\gamma\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} \quad ; \quad \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$$

mais puisque $\gamma \ll \omega_0$, on peut négliger le terme en $\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2$; ce qui donne :

$$Z_1 \simeq \omega_0^2 + 2\gamma^2 - 2\omega_0\gamma$$

ou encore $\quad Z_1 = \omega_0^2\left[1 + 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)\right]$

mais on a $Z_1 = \Omega_1^2$

$$\Omega_1 = \pm\, \omega_0\sqrt{1 + 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)}$$

Prenons la valeur positive et faisons un développement limité en se contentant du premier ordre en $\frac{\gamma}{\omega_0}$:

$$\sqrt{1 + 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)} \simeq 1 - \frac{\gamma}{\omega_0} \qquad \left((1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x\right)$$

ce qui donne :

$$\Omega_1 = \omega_0\left(1 - \frac{\gamma}{\omega_0}\right)$$

de la même manière on trouve après calcul que

$$\Omega_2 = \omega_0\left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0}\right)$$

de telle façon que la bande passante pour laquelle la puissance moyenne est égale à $\langle P \rangle_{max}/2$ est définie comme :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\gamma .$$

8) la puissance de dissipation instantannée est donnée par :

$$P_r = F_r \cdot \dot{y} = -f\,\dot{y}^2 \quad \text{où } F_r = -f\dot{y}$$

avec $y(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

ce qui donne après dérivation :

$$P_r(t) = + f A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi)$$

la puissance moyenne dissipée est donnée par :

$$\langle P_r \rangle = \frac{f A^2 \Omega^2}{\cancel{T^2}\,T} \int_0^T \sin^2(\Omega t + \varphi)\, dt$$

avec $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\langle P_r \rangle = \frac{f A^2 \Omega^2}{T} \int_0^T \underbrace{\frac{1 - \cos(2[\Omega t + \varphi])}{2}}_{T/2}$$

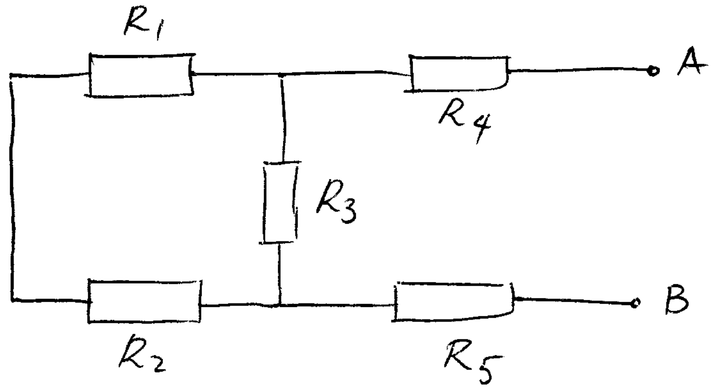
$$\langle P_r \rangle = \frac{f A^2 \Omega^2}{2}$$

Exercice 02 :

Partie I :

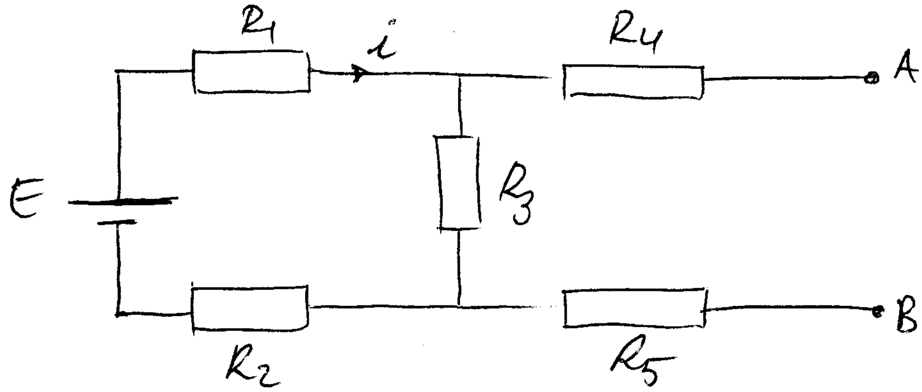
1 Calcul de R_{th} et E_{th}.

Pour R_{th} on court-circuite E et on calcule la résistance équivalente du circuit suivant :



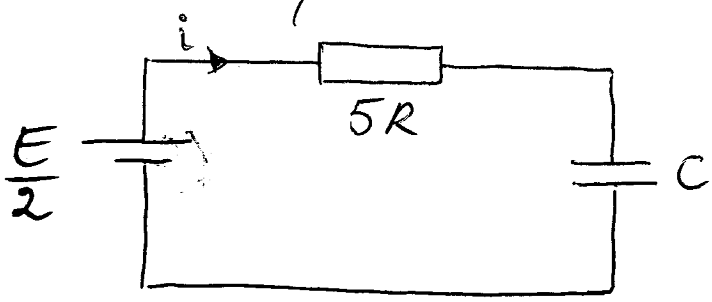
$$R_{th} = R_4 + R_5 + R_3 \,//\, (R_1 + R_2) = 5R$$

Pour E_{th} on calcule la tension entre les points A et B (à circuit ouvert !)



$$E_{th} = U_{AB} = R_3\, i = R_3 \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{E}{2}.$$

Le schéma équivalent est le suivant :



l'équation différentielle du circuit électrique s'écrit donc (loi des mailles)

$$\frac{E}{2} = 5R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

ou en terme de charges électriques $\frac{dq}{dt} = i(t)$

$$\frac{E}{2} = 5R\, \dot{q}(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

2/ l'équation différentielle est de premier ordre (linéaire) à coefficients constants:

$$\dot{q}(t) + \frac{1}{5RC}\, q(t) = \frac{E}{10R}$$

La solution générale est la somme d'une solution sans second membre et une solution particulière:

En effet: $q(t) = q_{SSSM}(t) + q_p(t)$

avec $\dot{q}_{SSSM}(t) + \frac{1}{5RC}\, q_{SSSM}(t) = 0$

où $q_{SSSM}(t) = K\, e^{-t/5RC}$ avec K une constante à définir par les conditions initiales

Alors que $q_p(t) = A$ (constante)

en remplaçant dans l'équation ci-dessus on trouve: $A = \frac{EC}{2}$

ce qui donne enfin :

$$q(t) = K e^{-t/5RC} + \frac{EC}{2}$$

c'est la charge électrique aux bornes du condensateur.

3/ à $t=0$ le condensateur est complètement déchargé

$$q(0) = K + \frac{EC}{2} = 0 \Rightarrow K = -\frac{EC}{2}.$$

l'expression de la charge electrique s'écrit donc sous la forme :

$$q(t) = \frac{EC}{2}\left(1 - e^{-t/5RC}\right)$$

Après $t = 5RC$, la quantité de charge électrique accumulée sur l'armature du condensateur est égale à :

$$q(5RC) = \frac{EC}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{EC}{2}\, 0.63.$$

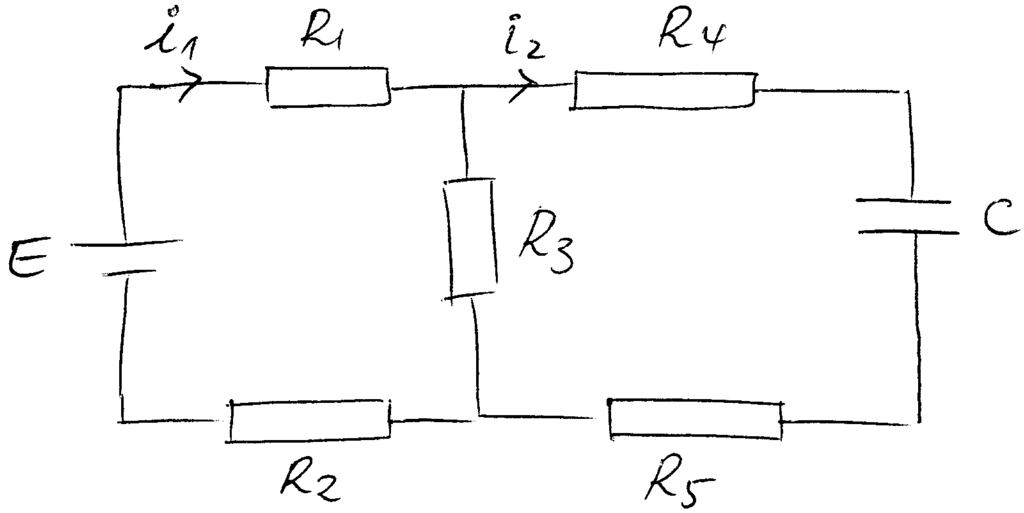
La charge finale accumulée sur le condensateur est égale à :

$$Q = q(t \to \infty) = \frac{EC}{2}.$$

et la tension finale aux bornes du condensateur est égale à :

$$V_0 = \frac{Q}{C} = \frac{E}{2}.$$

4/



Après que le Condensateur soit chargé le courant électrique dans la maille Contenant le Condensateur est nul ($i_2=0$). alors que $i_1 = \dfrac{E}{R_1+R_2+R_3}$.

5/ _ L'énergie électrique totale emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$W_e = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} C E^2.$$

. L'énergie perdue en chaleur est causée par la présence des résistances dans le circuit. Pour calculer l'énergie perdue on doit tout d'abord écrire l'expression de la puissance de dissipation aux bornes de chaque résistance du circuit, à savoir :

$$P_1 = R_1 i_1^2 \; ; \; P_2 = R_2 i_1^2 \qquad P_3 = R_3 (i_1 - i_2)^2$$

$$P_4 = R_4 i_2^2 \qquad P_5 = R_5 i_2^2$$

on a besoin donc de connaitre les expressions de $i_1(t)$ et de $i_2(t)$, pour cela on utilise la loi des mailles :

$$E = i_1 R_1 + R_2 i_1 + R_3(i_1 - i_2)$$

$$R_3(i_1 - i_2) = R_4 i_2 + V_C + i_2 R_5$$

Ce système d'équations nous permet d'écrire les expressions des courants électriques dans les deux branches

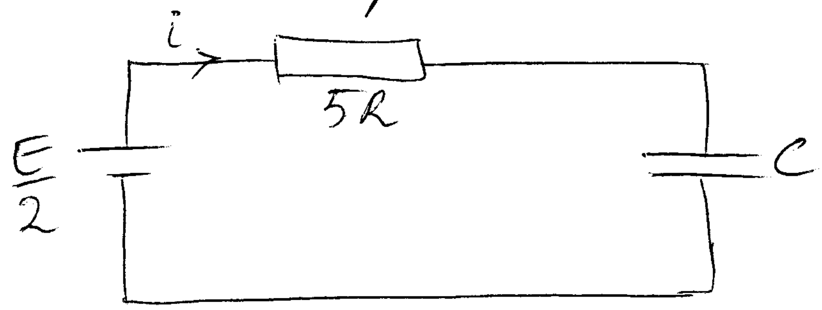
les énergies perdues par chaque résistance est donnée par :

$$W_j^1 = \int_0^{\infty} P_1(t)\,dt = R \int_0^{+\infty} i_1^2\,dt$$

$$W_j^2 = \int_0^{\infty} P_2(t)\,dt = R \int_0^{\infty} i_1^2\,dt$$

etc ....

On peut toutefois utiliser le circuit de thévenin équivalent pour calculer la puissance perdue



$$P_r(t) = 5R\, i^2$$

avec $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{EC}{2}\left(1 - e^{-t/5RC}\right)\right]$

$$i(t) = \frac{EC}{2}\frac{1}{5RC}\, e^{-t/5RC} = \frac{E}{10R}\, e^{-t/RC}$$

$$P_r(t) = 5R\,\frac{E^2}{10^2 R^2}\, e^{-2t/5RC} = \frac{E^2}{20R}\, e^{-2t/5RC}$$

$$W_j = \int_0^\infty P_r(t)\,dt = \frac{E^2}{20R}\int_0^\infty e^{-2t/5RC}\,dt$$

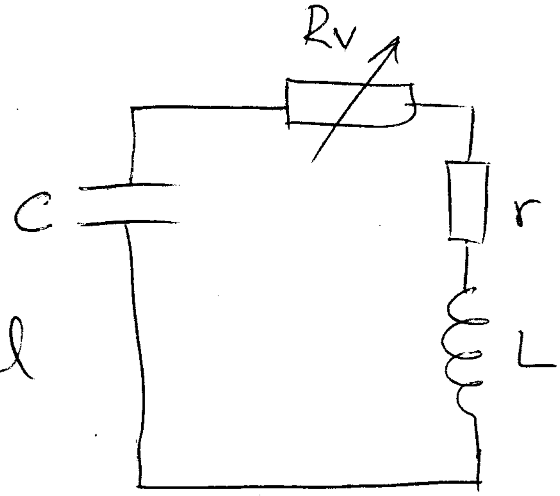
$$= \frac{E^2}{20R}\,\frac{5RC}{2} = \frac{1}{8}E^2C$$

- L'énergie fournie par le générateur pendant la charge complète du condensateur est la somme des énergies: perdue dans la résistance et emmagasinée dans le condensateur, à savoir:

$$W_G = 2\left(\frac{1}{8}E^2C\right) = \frac{1}{4}CE^2$$

Partie II :

1/ l'équation différentielle qui régit $v(t)$ la différence de potentiel aux bornes du condensateur est donnée par :



$$\frac{q}{C} + (r + R_V)\dot{q} + L\ddot{q} = 0$$ (loi de Kirchoff).

mais on sait que

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow q(t) = C\,v(t)$$

ce qui, en remplaçant dans l'équation différentielle ci-dessus, donne :

$$v(t) + C(r + R_V)\,\dot{v}(t) + LC\,\ddot{v}(t) = 0$$

ou encore en divisant par LC :

$$\ddot{v}(t) + \frac{r + R_V}{L}\,\dot{v}(t) + \frac{1}{LC}\,v(t) = 0$$

on pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\delta = \frac{r + R_V}{2L}$; ce qui donne :

$$\ddot{v}(t) + 2\delta\,\dot{v}(t) + \omega_0^2\,v(t) = 0$$

2/ On se propose une solution sous la forme : $v(t) = e^{rt}$ (fonction d'essai) avec r une constante à déterminer.

En remplaçant dans l'éq. diff. on trouve :

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{(éq. caractéristique)}$$

le discriminant s'écrit :

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2$$

$\underline{\underline{\Delta > 0}}$ les solutions r sont réelles

$$r_1 = \frac{-2\gamma - 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2} \qquad r_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

la solution de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des deux solutions $e^{+r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$; à savoir

$$v(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \qquad \text{avec } r_1 \text{ et } r_2 < 0$$

$$v(t) = \left[A e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t} + B e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t}\right] e^{-\gamma t}$$

$\Delta < 0$ les solutions r sont complexes

$$r_1 = -\gamma - j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad r_2 = -\gamma + j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

posons $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$v(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{-j\omega_a t} + B e^{j\omega_a t}\right]$$

$\Delta = 0$ la solution r est double.

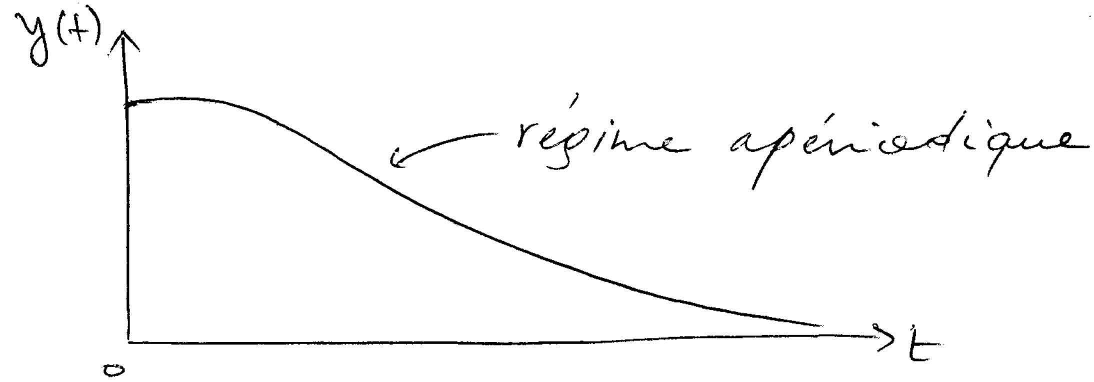
$r = -\gamma$

et la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$v(t) = (At + B)\, e^{-\gamma t}$$

3/ pour $\Delta > 0$ on a $\gamma > \omega_0$

c'est le cas d'un amortissement fort pas d'oscillation, et la masse une fois écartée de sa position d'équilibre ne fait que revenir vers sa position d'équilibre lentement, c'est le régime apériodique (la masse ne peut pas terminer une période complète !)



pour $\Delta < 0$ on a $\gamma < \omega_0$

c'est le cas d'un amortissement faible. La masse une fois écartée de sa position d'équilibre (on donne une vitesse initiale) fait des oscillations autour de sa position d'équilibre avec une amplitude qui diminue au cours du temps (à cause du terme $e^{-\gamma t}$ dans $v(t)$)

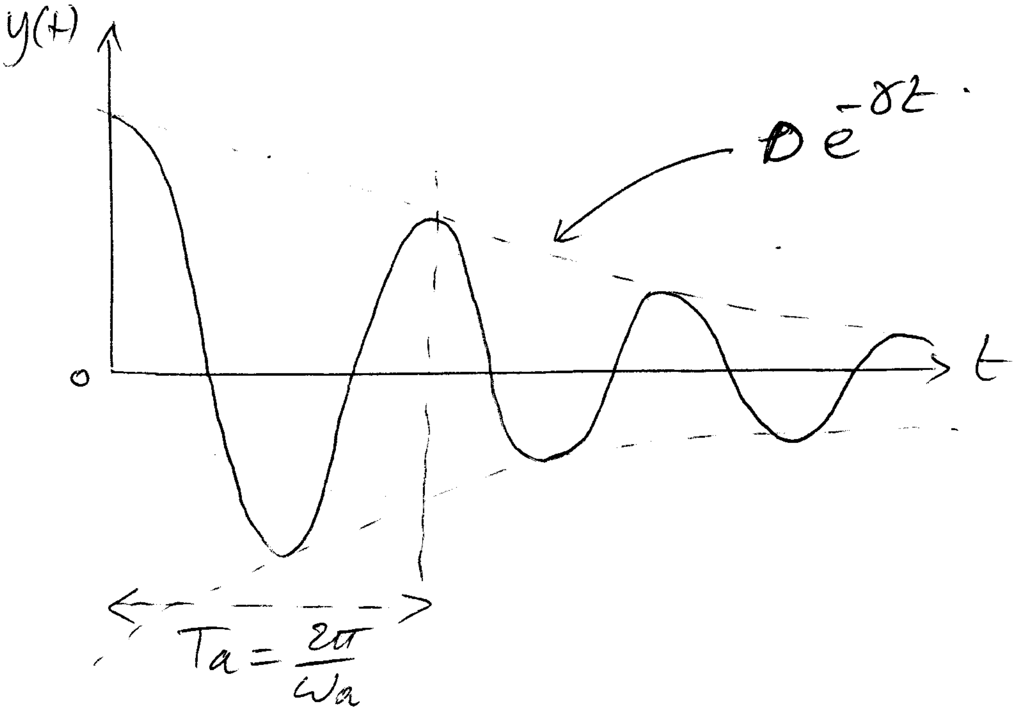
$$v(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{-j\omega_a t} + B e^{j\omega_a t}\right]$$

et avec une pseudo pulsation ω_a inférieure à ω_0. ($\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$).

Cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$v(t) = D e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \theta).$$

~~$\Delta = 0$ c'est le cas où~~



$\Delta = 0$ c'est le cas où $\gamma = \omega_0$
c'est le régime critique qui sépare les deux régimes d'oscillatoire et apériodique
la masse ne fait pas d'oscillation mais qui revient plus rapidement vers sa position d'équilibre si elle en était écartée.

4/ pour le régime critique on a :
$\gamma = \omega_0$ ou encore : $\frac{R_V + r}{2L} = \omega_0$.

$R_V = 2L\omega_0 - r = 1210\ \Omega$

pour un régime oscillatoire on doit avoir
$\gamma < \omega_0 \Rightarrow R_V < 2L\omega_0 - r$
la condition sur R_V est qu'elle doit être inférieure à $1210\ \Omega$.

5/ Pour $R_V = 0$ on aura : $\gamma = \frac{r}{2L}$
et $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$

6/ Au bout de 3 pseudo-périodes, l'amplitude diminue de 90% : cela veut dire que :

$$U(3T_a) = U(0) - 0.9\ U(0)$$

$$= 0.1\ U(0)$$

ou encore : $\dfrac{U(3T_a)}{U(0)} = 0.1$

mais on sait que $U(3T_a) = A\,e^{-d3T_a}\cos(\omega_a 3T_a + \varphi)$

avec $d = \dfrac{r}{2L}$ et $\omega_a 3T_a = 6\pi$

ce qui donne : $U(3T_a) = A\,e^{-d3T_a}\cos\varphi$

et $U(0) = A\cos\varphi$

on obtient donc : $\dfrac{U(3T_a)}{U(0)} = e^{-d3T_a} = 0.1$

$$e^{-d3T_a} = 10^{-1} \Rightarrow d3T_a = \ln 10$$

$$d = \frac{\ln 10}{3T_a} = 3837{,}63\ s^{-1} = \frac{r}{2L}$$

d'autre part on a : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - d^2}$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + d^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_a^2} + d^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{1}{LC} = \cancel{\sqrt{}}\frac{39{,}48}{(0.2)^2 \cdot 10^{-6}} + (3837{,}63)^2 = 9.87\ 10^{10} + (3837.)^2$$

$$\approx 9.87\ 10^{10}$$

Il manque une donnée !